Cálculo Diferencial e Integral

1) (Junio-95) En 1980 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años de acuerdo con la función $N(x) = 50(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2)$

   a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?

   b) ¿En qué periodos de tiempo aumenta el número de sus socios?

   (Sol: a) 100 ; b) $(0,2) \cup (3,+\infty)$ **)**

2) (Junio-95) Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesetas la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peseta que aumenta el precio, vende 2 helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesetas, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?

   (Sol: 95 pts.)

3) (Junio-95) En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y además, la suma de sus tres dimensiones debe ser 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

   (Sol: Cubo de arista 24 cm)

4) (Junio-95) Un automovilista sale de viaje y, al cabo de x horas, va a una velocidad de $80 + 3x$ Km/h. Al cabo de 3 horas descansa durante una hora. Reanuda la marcha a una velocidad de $108 - x$ Km/h, siendo x el tiempo en horas, desde que salió. Después de 6 horas, llega a su destino. ¿Qué distancia ha recorrido en total?

   (Sol: 919/2 Km)

5) (Sept-95) a) Definir los conceptos de máximo, mínimo y punto de inflexión de la función $y = f(x)$, indicando la forma de obtenerlos.

   b) Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 + 3x^2$

   (Sol: (0,0) min ; (-2,4) max ; (-1,2) inflex)

6) (Sept-95) a) La segunda derivada de un polinomio de segundo orden que pasa por el punto (1,17) es 4. Hallar el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en $x = -1$

   Obtener las zonas en que la función crece y las zonas en que decrece.

   (Sol: $2x^2 + 4x + 11$ **;** $(-\infty,-1)\downarrow; (-1,+\infty)\uparrow$ **)**

7) (Junio-96) Sea la función $y = -(x+2)(x-2)(x-4)$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha función cuando $x = 0$

b) Hallar el área del recinto limitado por la curva y el eje de abcisas.

(Sol: a) $4x - y - 16 = 0$ **; b) 148/3)**

8) (Junio-96) A las nueve de la mañana, surge un rumor en una ciudad que se difunde a un ritmo de $e^{2t} + 1000$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcular el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.

(Sol: Aprox 2198 personas)

9) (Sept-96) El elemento radio se descompone según la expresión $y(t) = n\exp(-0{,}0004t)$, donde $y(t)$ es la cantidad en gramos en el instante *t*, *t* es el tiempo en años, *n* es la cantidad inicial en gramos y $\exp(x) = e^x$ denota la función exponencial. Si se empieza con 500 gramos:

a) ¿Cuántos gramos quedarán al cabo de 200 años?

b) ¿Cuál será la velocidad de descomposición al cabo de *t* años?

c) ¿Cuál será la velocidad de descomposición al cabo de mil años?

d) ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la velocidad de descomposición sea igual a –0,1637?

(Sol: a) 461'558 ; b) $-0.2\,e^{-0'0004t}$ **; c) 0.8185; d) 500)**

10) (Sept-96) a) Hacer un esquema de la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + 6$, calculando sus máximos o mínimos relativos y los puntos de corte con el eje de abcisas.

b) Hallar el área comprendida entre la curva anterior, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$

(Sol: b) 17/3)

11) (Junio-97) El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del pasado mes de Enero viene dado por la función $y(t) = 100 + 200e^{0{,}2t}$ donde *t* representa el número de días transcurridos a partir del 1 de Enero de 1996.

a) ¿Cuántos enfermos había el citado 1 de Enero?

b) Calcular la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de evolución del número de enfermos al cabo de *t* días

c) Determinar la fecha en la cual la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803,42 enfermos /día

(Sol: a) 300; b) $40\,e^{0'2t}$ **; c) 15 de Enero)**

12) (Junio-97) El valor de un equipo informático decrece a un ritmo dado de (10t-50) miles de Pta./año. Si el valor inicial del citado equipo era de 300.000 Pta. ¿cuál será su valor al cabo de 5 años?

(Sol: 299.875 pts)

13) (Junio-97) Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto al muro cuesta 300 Pta por metro y la de los otros dos lados 100 Pta por cada metro. Si el presupuesto disponible es de 300.000 Pta, hallar el área del mayor recinto que puede cercarse

(Sol: 375.000 m^2)

14) (Sept-97) Para la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<2 \\ 2x-1 & si \quad 2\le x<4 \\ 5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) Estudiar razonadamente su continuidad en R.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha función cuando $x=-2$

(Sol: a) Continua en $R-\{2,4\}$; b) $y-5=-4(x+2)$)

15) (Sept-97) Calcular el área del recinto limitado por $y=e^{-2x}$, $x=-3$, $x=-1$ y el eje de abcisas.

(Sol: $(e^6-e^2)/2$)

16) (Sept-97) Sea la función $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2$

a) Analizar sus puntos de inflexión en R

b) Analizar su máximo absoluto en R

(Sol: a) No tiene ; b) No tiene)

17) (Junio-98) Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado (en miles de personas) por la función $s(x)=2x^3-15x^2+24x+26$, donde *x* indica el número de años desde la última remodelación.

a) Hállese el año en que el club ha tenido el mayor número de socios

b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Indíquese si esta remodelación tuvo éxito o no.

(Sol: a) El 1º ; b) No tuvo éxito)

18) (Junio-98) Sea la función $f(x)=2x^3+bx^2+ax-5$

a) Hállense los valores de a y b de forma que f tenga un máximo en $x=1$ y un mínimo en $x=2$

b) Hállese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX entre $x=0$ y $x=3$

(Sol: a) a = 12, b = -9 ; b) 51/16)

19) (Sept-98) La altura, en metros, de una planta tropical desde el año en que empieza a germinar (t = 0) hasta el año que se seca (t = 4) sigue la ley $f(t)=\sqrt{-2t^2+8t}$

a) Hállense los años en los que la planta alcanza una altura de $\sqrt{6}$ metros.

b) Hállese el año en que la planta alcanzará la altura máxima y el valor de esta.

(Sol : a) t = 1, t = 3; b) t = 2, $\sqrt{8}$ **)**

20) (Sept-98) Sea la función $f(x)=3x-x^3$

a) Esbozar su gráfica a partir del máximo, del mínimo y del punto de inflexión.

b) Hállese el área de la región finita que dicha función delimita con el eje OX.

(Sol: a) (-1,-2) min, (1,2) max, (0,0) Inf; b) 9/2)

21) (Sept-98) El número de personas, en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa, viene dado por la función $f(t)=\dfrac{30t}{t^2-2t+4}$ donde t es el tiempo en días desde que se inició el contagio.

a) ¿Cuál es la tasa de cambio del número de personas afectadas correspondientes al cuarto día?

b)¿En qué día se tiene el máximo número de enfermos? ¿Cuántos son estos?

c) ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá extinguiendo con el transcurso del tiempo? Justifíquese razonadamente

(Sol: a) –5/2 ; b) t = 2 ; 15 enfermos; c) Si)

22) (Junio-99) Dada la curva de ecuación $y=-x^3+26x$, calcúlense las rectas tangentes a la misma, que sean paralelas a la recta de ecuación $y=-x$

(Sol: $y+x+54=0$; $y+x-54=0$ **)**

23) (Junio-99) Se considera la función $f(x)=2x^3-21x^2+60x-32$

a) Hállense sus máximos y mínimos

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Represéntese gráficamente

(Sol: a) 2 máx, 5 min; b) $(-\infty,2)\uparrow; (2,5)\downarrow; (5,+\infty)\uparrow$ **)**

24) (Sept-99) Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $C(x)=3x^2-27x+108$

a) ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

b) Justifíquese que la función que define el coste medio, $M(x)$, no tiene puntos de inflexión

(Sol: a) 6)

25) (Sept-99) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & si \quad 0 \le x < 5 \\ x - 5 & si \quad 5 \le x \le 10 \end{cases}$

a) Represéntese gráficamente

b) Estúdiese su continuidad

(Sol: Es continua en R)

26) (Junio-00) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estúdiese si es continua en el punto $x = 2$

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$

c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

(Sol: a) No ; b) $y - \frac{21}{5} = \frac{59}{5}(x-3)$ **; c)** $y = 3x - 8$ **)**

27) (Junio-00) Sea la función dependiente de los parámetros *a* y *b*:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & si \quad x \le 0 \\ x - 1 & si \quad 0 < x \le 2 \\ bx - 5 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Hállense los valores de *a* y *b* para que la función sea continua en el conjunto R de números reales.

b) Represéntese gráficamente para los valores $a = 0$ y $b = 3$

c) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

(Sol : a) a = 1, b = 3; c) 3)

28) (Sept-00) Dada la función, definida en los reales salvo en $x = 0$, $f(x) = 3 - x - \dfrac{2}{x}$, calcúlese:

a) Las coordenadas de sus máximos y sus mínimos.

b) El ára de la región plana acotada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje positivo OX.

(Sol : a) $x = -\sqrt{2}$ **min,** $x = \sqrt{2}$ **max ; b)** $\frac{3}{2} - \ln 2$ **)**

29) (Sept-00) Dada la función $s(t)=\dfrac{340+330t-10t^2}{t+2}$ definida en los reales, salvo en $t=-2$, hállese:

a) El valor positivo de t en el que se hace cero la función.

b) El valor positivo de t en el que $s(t)$ se hace máximo.

c) Las asíntotas de $s(t)$

(Sol : a) t = 34 ; b) t = 4; c) t = -2, $y=-10t+350$**)**

30) (Junio-01) Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen una base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

(Sol : 10 cm y 5 cm)

31) (Junio-01) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$

a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcúlense sus puntos de inflexión.

c) Esbócese su gráfica.

(Sol: a) (-2,13/3) Max, (1,-1/6) Min ; b) (-1/2,25/12))

32) (Sept-01) Sean las funciones $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$

a) Determínense *a*, *b* y *c* sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (-2,-3) y (1,0).

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto (-2,-3).

c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

(Sol: a) $a=2, b=-3, c=1$ **; b)** $4x-y+5=0$ **; c) 9)**

33) (Sept-01) Sean la función $f(x)=2x^2-\dfrac{1}{3}x^3$, calcúlense:

a) Los intervalos donde es creciente y decreciente

b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos

c) El valor de *x* para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

(Sol: a) $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\downarrow$ **,** $(0,4)\uparrow$ **; b) (0,0) Min, (4,32/3) Max ; c)** $x=2$ **)**

34) (Junio-02) a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y=x^2-4x-5$

b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

(Sol: a) (2,-9) ; b) 54)

35) (Junio-02) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 4x$.

a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Representar gráficamente la curva.

c) Calcular el área del recinto plano limitado por la curva y el eje OX.

(Sol: a) (0,0), (2,0), (-2,0) ; (-1.15,3.4) Max, (1.15,-3.1) Min ; c) S = 8)

36) (Sept-02) Para cada valor de *a*, se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x+2}$. Se pide:

a) Calcular el valor de *a* para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$

b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para el valor $a = 3$

(Sol: a) $a = 18$ **; b)** $x = -2$ **; c)** $y = 3x - 9$ **)**

37) (Sept-02) Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a$ b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3$ c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5$

(Sol: a) $a = 2\ln 2$ **; b)** $a = e^3 - 1$ **; c)** $a = \dfrac{3}{e^5 - 1}$ **)**

38) (Junio-03) Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 6$. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen

c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$

(Sol: a) 6/5; b) (1/2,-25/4) Min; c) S = 36)

39) (Junio-03) Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$

(Sol: a) Crece en $R - \{\pm 1\}$ **; b)** $x = \pm 1$, $y = 0$ **; c)** $y = x$ **)**

40) (Sept-03) Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x=1$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x=2$

(Sol: a) $3ex - y - 2e = 0$ **; b)** $\frac{e^4 - 1}{2}$**)**

41) (Sept-03) Sea la función $f(x) = \frac{-x^3 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$. Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad

c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

(Sol: a) D = $R - \{2,3\}$**; b) En D ; c)** $x = 2$, $x = -3$, $y = x$, $y = \frac{1-x}{2}$ **)**

42) (Junio-04) Calcular la integral definida $\int_{-1}^{1} \left(|x| + x + 1\right) dx$

(Sol: 3)

43) (Junio-04) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$

a) Determinar su dominio de definición.

b) Obtener sus asíntotas.

(Sol: a) $R - (-2,-1] \cup [1,2)$**, b)** $x = \pm 1$, $y = 1$**)**

44) (Sept-04) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

(Sol: a) a = 3, a = -1/2 ; b) (1,37/3) Max, (5,5/3) Min)

45) (Sept-04) Sean las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 8$; $g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$

a) Calcular $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Calcular el área del recinto limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$

(Sol: a) –2 ; b) 54)

46) (Junio-05) La función $B(x)=\dfrac{-x^2+9x-16}{x}$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso venta, siendo *x* el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

(Sol: 4 artículos; 1000 €)

47) (Junio-05) a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x$, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=4$.

(Sol: a) $y-e^2=-e^2x$ **; b) 13)**

48) (Sept-05) Se considera la curva de ecuación $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abcisa $x=1$

b) Hallar las asíntotas de la curva.

(Sol: a) $2y-2x+1=0$ **; b)** $y=x$ **)**

49) (Sept-05) Se considera la función real de variable real de finida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$.

a) Hallar sus asíntotas.

b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

(Sol: a) $x=3$ **;** $x=-3$ **;** $y=1$ **; b) (0,0) max. rel.)**

50) (Junio-06) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=x^3-9x$. Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

(Sol: $(-\sqrt{3},6\sqrt{3})$ **máx,** $(\sqrt{3},-6\sqrt{3})$ **min; b) S =** $\dfrac{81}{2}$ **)**

51) (Junio-06) Se considera la curva cartesiana $y=x^2+8x$. Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y=2x$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana $y=x+8$

(Sol: a) (-3,-15) ; b) $\dfrac{243}{2}$ **)**

52) (Sept-06) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4}$

a) Encontrar las asíntotas de la función.

b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

(Sol: a) $x=2$ **,** $x=-2$ **,; b)En** $(-\infty,-4)\cup(-2,2)\cup(4,+\infty)+$ **; En** $(-4,2-)\cup(2,4)-$ **)**

53) (Sept-06) Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=9-x^2 \quad , \quad g(x)=3+x$$

y obtener su área.

(Sol: 125/6)

54) (Junio-07) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

a) Determinar las asíntotas de la función..

b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

(Sol: a) $x=-3$ **,** $y=x-9$ **; (-9,-24) max, (3,0) min ; b)** $(-\infty,-9)\cup(3,+\infty)\uparrow$ **,** $(-9,-3)\cup(-3,3)\downarrow$

55) (Junio-07) Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=\frac{5}{4}x^2 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)\,, \quad h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)$$

y obtener su área.

(Sol: 70/3)

56) (Sept-07) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

(Sol: $D=R-\{1.2\}$ **; b)** $x=1$ **evitable,** $x=2$ **salto infinito ; c)** $x=2$ **,** $x=1$

57) (Sept-07) La gráfica de la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto (0,0)
- Tiene un máximo local en el punto (1,2)

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*

b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$

(Sol: $a = -4, b = 6, c = 0$ **; b)** $\frac{7}{2}$**)**

58) (Junio-08) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real: $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 1 - x^2$

(Sol: $\frac{9}{8}$**)**

59) (Junio-08) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}$, $x \neq 0$

a) Determínese las asíntotas de f .

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)\, dx$

(Sol: a) $x = 0$ **,** $y = x + 1$ **; b)** $x = -\sqrt{2}$ **max,** $x = \sqrt{2}$ **min ;** $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \uparrow$**,** $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \downarrow$ **; c)** $\frac{5}{2} + \ln 4$ **)**

60) (Sept-08) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa de capacidad 500 dm^3 . La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

(Sol: base:10 dm, altura: 5 dm)

61) (Sept-08) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} \quad , \quad x \neq \pm 2$$

a) Determínense las asíntotas de *f*.

b) Calcúlense los máximos y los mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida: $\int_3^5 (x^2 - 4)\, f(x)\, dx$

(Sol: a) $x = 2$ **,** $x = -2$ **,** $y = 1$ **; b) Max (0,-1/2) ,** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \uparrow$**,** $(0, 2) \cup (2, +\infty) \downarrow$ **; c)** $\frac{110}{3}$**)**

62) (Junio-09) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = (x^2 - 1)^2$

a) Determínese los extremos relativos de f .

b) Hallase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX

(Sol: a) (-1,0) y (1,0) mínimos ; (0,1) máximo ; b) $y - 96x = 224$ **; c)** $\frac{16}{15}$ **)**

63) (Junio-09) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x - a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)\,dx = 0$

(Sol: a) Si $a > -1/4$ **dos verticales, si** $a = -1/4$ **una vertical, si** $a < -1/4$ **, no tiene ; b)** $b = 0, b = 1$**)**

64) (Sept-09) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & si \quad x \le -3 \\ x^2 + 9 & si \quad -3 < x \le 2 \\ -x + 15 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función f

b) Hallese la ecuación de la recta tangente a la grafica de f en el punto de abcisa $x = 1$

c) Calcúlense el área del recinto plano acotado limitado por la grafica de f y el eje OX.

(Sol: b) $y - 10 = 2(x-1)$ **; c)** $\frac{1333}{6}$**)**

65) (Sept-09) El beneficio salarial (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada esta determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \ge 0$

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para no incurrir en perdidas (es decir, beneficio negativo)

(Sol: b) máximo para 3.5 (2250€) ; Max 5, min 2)

66) (Junio-10-Fase General) Se considera el rectángulo (R) de vértices *BOAC* con $B(0,b)$, $O(0,0)$, $A(a,0)$, $C(a,b)$, $a>0$, $b>0$, y cuyo vértice *C* está situado en la parábola de ecuación $y=-x^2+12$.

a) Para $a=3$, determínense las coordenadas de los vértices de (R) y calcúlese el área de (R).

b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R) sea máxima.

c) Calcúlese el valor de dicha área máxima.

(Sol: a) (0,0), (3,0), (0,3), (3,3) , Area: 9; b) (0,0), (2,0), (0,8), (2,8) ; c) Area: 16)

67) (Junio-10-Fase General) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<0 \\ 4-x^2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ ax+b & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcúlense *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x=2$.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x=1$.

c) Para $a=1$, $b=-2$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de *f* y el eje *OX*.

(Sol: a) $a=-4, b=8$ **; b)** $2x+y-5=0$ **; c) 40/3)**

68) (Junio-10-Fase Específica) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f

c) Calcúlese el área del recinto limitado por las rectas verticales $x=2$, $x=3$, la gráfica de la función f y la recta de ecuación $y=x+1$

(Sol: a) $x=1$, $y=x+1$ **b) (0,0) max , (2,4) min; c)** $\ln 2$ **)**

69) (Junio-10-Fase Específica) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-x+a & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{3}{bx} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de *a* y *b* para que f sea continua y derivable en todos sus puntos.

b) Para $a=6$, $b=3/4$, determínense los puntos de corte de la gráfica con el eje *OX*. Esbócese la gráfica de f.

c) Para $a=6$, $b=3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje *OX* y la recta vertical $x=2$

(Sol: a) $a=5, b=1$ **; b) (0,6) y (-3,0) ; c)** $\frac{56}{3}+4\ln 2$ **)**

70) (Sept-10-Fase General) El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

(Sol: 2 m de largo y 1 de ancho ; 200 €)

71) (Sept-10-Fase General) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-a & si \quad x\le -1 \\ -3x^2+b & si \quad -1<x<1 \\ \log x+a & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense *a* y *b* para que la función sea continua en todos los puntos.

b) Para $a=0, b=3$, represéntese gráficamente la función f

c) Para $a=0, b=3$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(Sol: a) $a=1, b=4$ **; c) 4)**

72) (Sept-10-Fase Específica) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=x^3-3x^2+4$

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

b) Determínese los extremos relativos de f y esbócese su gráfica.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y=x+1$

(Sol: $3x+y-5=0$ **; b) (0,4) max, (2,0) min ; c) 8)**

73) (Sept-10-Fase Específica) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ ax+b & si \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Calcúlense *a* y *b* para que la función sea continua en todos los puntos.

b) ¿Existen valores de *a* y *b* para los cuales f es derivable en $x=3$? Razona la respuesta.

c) Para $a=4, b=-1$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

(Sol: a) $a=-1, b=1$ **; b) No existen ; c)** $\frac{22}{3}$ **)**

74) (Junio-11) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f

b) Determínese la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=1$

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

(Sol: a) $D=R-\{\pm\sqrt{2}\}$**; (0,0) ;** $x=-\sqrt{2}$ **,** $x=\sqrt{2}$ **; y=0 ; b)** $9x+y-6=0$ **; c)** $(3/2)(\ln 7-\ln 2)$ **)**

75) (Junio-11) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & si \quad x>-1 \end{cases}$$

a) Calcúlense *a, b* para que *f* sea continua y derivable en $x=-1$

b) Para $a=1$, $b=3$, represéntese la gráfica de la función f

c) Calcúlese el valor de *b* para que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=6$

(Sol: a) $a=1/2, b=3$ **; c)** $b=-5$ **)**

76) (Sept-11) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense sus asíntotas. Calcúlense los extremos relativos de f

b) Represéntese gráficamente la función f

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f, la recta horizontal $y=1$ y la recta vertical $x=1$

(Sol: a) $y=1$ **, (-1,9) min , (1,2) max ; b) ln 2)**

77) (Sept-11) Se considera un rectángulo R de lados *x* e *y*

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense *x* e *y* para que el área de R sea máxima y calcular el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2, calcúlense *x* e *y* para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

(Sol: a) 3 cm , 9 cm^2; c) 6 m ; 36 m^2)

78) (Junio-12) Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en un finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

(Sol: 200 cepas)

79) (Junio-12) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f

b) Represéntese gráficamente la función f

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY, y la recta $x=2$

(Sol: a) Continua en R, deriv en $R-\{1\}$, c) Area = 2)

80) (Sept-12) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de *f*.

b) Represéntese gráficamente la función *f*.

c) Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$

(Sol: a) $x=1$, $y=2x+1$; c) ln 10)

81) (Sept-12) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x\le 1 \\ x^3-x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a y b para que la función *f* sea continua y derivable

b) Para $a=0$ y $b=1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y-8x=1$

c) Sea *g* la función real de variable real definida por $g(x)=1-2x^2$. Para $a=1$ y $b=0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de *f* y la gráfica de *g*.

(Sol: a) $a=1, b=0$ **, b)** $y=8x-11$ **; c)** $9/8$ **)**

82) (Junio-13) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=3e^{-2x}$

a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $x=0$.

b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de *f*, las rectas $x=0$, $x=0{,}5$ y el eje de abcisas.

(Sol: a) $6x+y-3=0$ **, b)** $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ **)**

83) (Junio-13) Se considera la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<0 \\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad de *f* en $x=0$ para los distintos valores del parámetro *a*.

b) Determínense las asíntotas de la función.

(Sol: a) Si $a=3$ **continua en R ; b)** $x=1, x=3$ **AV;** $y=0$ **AH)**

84) (Junio-13) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=x(5-x)^2$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de *f*.

(Sol: a) $(-\infty,5/3)\cup(5,+\infty)\uparrow$ **,** $(5/3,5)\downarrow$ **; b)** $(-\infty,10/3)\cup$; $(10/3,+\infty)\cap$ **)**

85) (Sept-13) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Hallar las asíntotas de *f*

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abcisa $x=1$

(Sol: a) $x=-3,\ x=3,\ y=x$ **; b)** $y+\frac{1}{8}=-\frac{13}{32}(x-1)$ **)**

86) (Sept-13) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & si \quad x\leq 1 \\ \ln(2x-1) & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcúlese *a* para que la función *f* sea continua en todo R

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a=3$

(Sol: a) $a = 3$ **;**

87) (Sept-13) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

a) Determínese los extremos relativos de f

b) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(Sol: a) $(-2,-1/4)$ **min,** $(2,1/4)$ **max); b)** $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$ **)**

88) (Junio-14) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x + a & si \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & si \quad 1 \le x \le 3 \\ x + b & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R

b) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

(Sol: a) $a = -2,\, b = -4$ **; b)** $\dfrac{8}{3}$ **)**

89) (Junio-14) Se considera la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$

b) Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

(Sol: a) $y + 1 = 4(x - 1)$ **; b) 41)**

90) (Junio-14) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*

(Sol: a) $x = 2,\, y = x + 2$ **; b)** $(-\infty,0) \cup (4,+\infty) \uparrow$**,** $(0,2) \cup (2,4) \downarrow$ **)**

91) (Sept-14) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x(x-2)}$

a) Determínense las asíntotas de *f*.

b) Estúdiese si la función *f* es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$

(Sol: a) $x=0, x=2, y=1$ **; b) Creciente)**

92) (Sept-14) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=2e^{x+1}$

a) Esbózese la gráfica de la función f

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abcisas y las rectas $x=0$ y $x=1$

(Sol: b) $2e(e-1)$ **)**

93) (Sept-14) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{\lambda x}{4+x^2}$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente e la gráfica de f en $x=-1$sea paralela a la recta $y=2x-3$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ para $\lambda=1$

(Sol: a) 50/3 ; b) $\frac{1}{2}\ln 2$ **)**